楕円関数とその応用

飯寄ゼミ
相川裕次郎　森本裕子　中村真季

1　はじめに

数学は今現在いろいろな多くの分野で応用されている．日常生活の中では，等速直線運動（自動車が一定の速度で走行する等）は一次関数で，野球のホームランの軌跡などは二次関数で表されることはよく知られている．しかし，電気学や流体力学，力学など理工学の分野では，一次関数や二次関数だけでは表されない事象もたくさん存在する．そこで，日常生活に目を向け，物理に広く応用されている楕円関数に興味を持った．

楕円関数という初めて触れる概念であるから，まず準備として楕円積分，楕円関数の定義や基本的な性質を学び，それを用いてなわとびの回転運動を考察した．

2　楕円積分

楕円積分の名前の由来は，楕円の弧の長さが第 2 種楕円積分で表されることからきている．弧の長さは楕円のときだけではなく，正弦曲線の長さを表すこともある．楕円積分には第 2 種楕円積分以外に，第 1 種楕円積分と第 3 種楕円積分があり，これらを以下のように表記する．

第 1 種不完全楕円積分 ： $F(k,\varphi) = \displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$

第 2 種不完全楕円積分 ： $E(k,\varphi) = \displaystyle\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi.$

第 3 種不完全楕円積分 ：

$$\pi(k,\, n,\, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

k は母数であり $0<k<1$ となる．これらの不完全楕円積分 $\varphi=0$ から $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ までの定積分を完全楕円積分といい，それぞれ以下のように表記する．

第 1 種完全楕円積分 ： $K(k) = F\left(k, \dfrac{\pi}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$

第 2 種完全楕円積分 ： $E(k) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi.$

第 3 種完全楕円積分 ：

$$\pi(k,\, n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

3 種類の楕円積分において，$z=\sin\varphi$ とおいて得られる式は，ルジャンドル・ヤコビの標準形といいそれぞれ以下のように表記する．

第 1 種楕円積分の標準形 ： $\displaystyle\int_0^{z} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$

第 2 種楕円積分の標準形 ： $\displaystyle\int_0^{z} \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}dz.$

第 3 種楕円積分の標準形 ： $\displaystyle\int_0^{z} \frac{dz}{(1+nz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$

3　ヤコビの楕円関数

定義　ヤコビの楕円関数の定義を考える前に，まず三角関数の逆関数について考える．これは，$-1\le x\le 1$，$-\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2}$ において

$$y \equiv \int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x, \quad \sin y = x.$$

と定義されている．$-\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2}$ での $x=\sin y$ を $\mathrm{SIN}\, y$ とすると，$x=\sin y (y\in\mathbb{R})$ は周期関数なので，$-\dfrac{\pi}{2}+N\pi\le y\le\dfrac{\pi}{2}+N\pi$ において $\sin y = (-1)^N\,\mathrm{SIN}(y+N\pi)$ と表わすことができる．

平行して第 1 種楕円積分の逆関数を $-1\le x\le 1$，$-K(k)\le u\le K(k)$ において

$$u \equiv \int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \mathrm{sn}^{-1}\, x \tag{1}$$

と定義する．母数 k を明らかにするためには $u=\mathrm{sn}^{-1}(x,\,k)$，またこの逆を $x=\mathrm{sn}\, u=\mathrm{sn}(u,\,k)$ と書く．このときヤコビの楕円関数 $\mathrm{sn}\, u$ において $-K(k)\le u\le K(k)$ での $x=\mathrm{sn}\, u$ を $\mathrm{SN}\, u$ とすると，$-K(k)+2NK(k)\le u\le K(k)+2NK(k)$ において

$$(-1)^N\,\mathrm{SN}(u-2NK(k)) = \mathrm{sn}\, u$$

と表すことができる．したがって，$x=\mathrm{sn}\, u (u\in\mathbb{R})$ を周期関数として，$-\infty<u<\infty$ で定義する．

また，sn，cn，dn の関係は $-K(k)\le u\le K(k)$ の間で

$$\begin{aligned} \mathrm{cn}\, u &= \sqrt{1-\mathrm{sn}^2 u} \\ \mathrm{dn}\, u &= \sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u} \end{aligned}$$

と定義する．したがって sn と同様にして，$\mathrm{cn}\, u, \mathrm{dn}\, u$ において $-K(k)\le u\le K(k)$ での $y=\mathrm{cn}\, u$，$z=\mathrm{dn}\, u$ をそれぞれ $\mathrm{CN}\, u, \mathrm{DN}\, u$ とすると，$-K(k)+2NK(k)\le u\le K(k)+2NK(k)$ において

$$\begin{aligned} (-1)^N\,\mathrm{CN}(u-2NK(k)) &= \mathrm{cn}\, u \\ \mathrm{DN}(u-2NK(k)) &= \mathrm{dn}\, u \end{aligned}$$

と表わすことができる．したがって，$y=\mathrm{cn}\, u, z=\mathrm{dn}\, u (u\in\mathbb{R})$ をそれぞれ周期関数として，$-\infty<u<\infty$ で定義する．また $k=0$ に対しては

$$\mathrm{sn}(u,\,0)=\sin u, \quad \mathrm{cn}(u,\,0)=\cos u, \quad \mathrm{dn}(u,\,0)=1$$

となる．sn, cn についてはそれぞれ $\sin, \cos$ と似た性質がある．さらに，sn, cn の周期は $4K(k)$，dn の周期は $2K(k)$ である．

微分　ヤコビの楕円関数の導関数は以下の通りである．

$$\begin{aligned} (\mathrm{sn}\, u)' &= \mathrm{cn}\, u\,\mathrm{dn}\, u, \\ (\mathrm{cn}\, u)' &= -\mathrm{sn}\, u\,\mathrm{dn}\, u, \\ (\mathrm{dn}\, u)' &= -k^2\,\mathrm{sn}\, u\,\mathrm{cn}\, u \end{aligned}$$

加法定理　楕円関数は三角関数と似た性質がある．三関関数において加法定理が成り立つように，楕円関数においても以下の加法定理が成り立つ．

sn の加法定理 ： $\mathrm{sn}(u+v) = \dfrac{\mathrm{sn}\, u\,\mathrm{cn}\, v\,\mathrm{dn}\, v + \mathrm{sn}\, v\,\mathrm{cn}\, u\,\mathrm{dn}\, u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}$

cn の加法定理 ： $\mathrm{cn}(u+v) = \dfrac{\mathrm{cn}\, u\,\mathrm{cn}\, v + \mathrm{sn}\, u\,\mathrm{sn}\, v\,\mathrm{dn}\, u\,\mathrm{dn}\, v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}$

dn の加法定理 ： $\mathrm{dn}(u+v) = \dfrac{\mathrm{dn}\, u\,\mathrm{dn}\, v + k^2\,\mathrm{sn}\, u\,\mathrm{sn}\, v\,\mathrm{cn}\, u\,\mathrm{cn}\, v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}$

振幅関数 am　am は振幅関数（amplitude）と呼ぶ．(1) において $x=\sin\phi$ とおくと $dx=\cos d\phi$ なので

$$\begin{aligned} u &= \int_0^{\phi} \frac{\cos\phi d\phi}{\sqrt{(1-\sin\phi)(1-k^2\sin^2\phi)}} = \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \\ &= \mathrm{sn}^{-1}(\sin\phi). \end{aligned}$$

この逆関数を am とおくと $\phi = \mathrm{am}\, u = \mathrm{am}(u,\, k)$ なので

$$x = \sin\phi = \sin(\mathrm{am}\, u)$$
$$\mathrm{cn}\, u = \sqrt{1-\sin^2(\mathrm{am}\, u)} = \cos(\mathrm{am}\, u)$$

第 2 種・第 3 種楕円積分　ヤコビ楕円関数を第 1 種楕円積分を用いて定義して出発し，第 2 種楕円積分，第 3 種楕円積分を求める．まず第 2 種楕円積分において $z = \sin\phi$ とすると，

$$E(k,\phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1-k^2\sin^2\phi} d\phi.$$

ここで $\sin\phi = \mathrm{sn}\, u (-\frac{\pi}{2} \le \phi \le \frac{\pi}{2},\ -K(k) \le u \le K(k))$ とおくと

$$\begin{aligned} E(\phi,k) &= \int_0^u \mathrm{dn}\, u \mathrm{dn}\, u du = \int_0^u \mathrm{dn}^2\, u du \\ &\equiv \epsilon(u)(\text{ヤコビのエプシロン関数}). \end{aligned}$$

次に第 3 種楕円積分は $z = \mathrm{sn}\, w(-1 \le z \le 1,\ -K(k) \le w \le K(k))$ とおくと

$$\int_0^z \frac{dz}{(1+nz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int_0^w \frac{dw}{1+n\,\mathrm{sn}^2\, w}.$$

楕円の弧　　楕円は $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ で表記する．$(x,\ y) = (a\sin\phi,\ b\cos\phi)$ とおき，ここで $\phi = \mathrm{am}(u,\, k)$ とおくと

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{a^2\,\mathrm{cn}^2\, u + b^2\,\mathrm{sn}^2\, u}\,\mathrm{dn}\, u du \\ &= a\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\mathrm{sn}^2\, u}\,\mathrm{dn}\, u du. \end{aligned}$$

ここまで $\mathrm{sn}\, u, \mathrm{dn}\, u$ の母数は k であったが，ここで $k^2 = \dfrac{a^2-b^2}{a^2}$ とすると

$$ds = a\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\, u}\,\mathrm{dn}\, u du = a\,\mathrm{dn}\, u\,\mathrm{dn}\, u du = a\,\mathrm{dn}^2\, u du$$

となる．したがって楕円の弧の長さ s は

$$s = a\int_0^u \mathrm{dn}^2\, u du = a\epsilon(u) = aE(k,\phi)$$

と書くことができる.

4　なわとびのひも

なわとびのひも（ロープ）のまわっている形は二次曲線ではなく，実はヤコビ楕円関数 sn で与えられる曲線の形なのである. まずは準備として sn 曲線の弧長を求めていき，その後になわとびのひもの力学問題について考察していく.

4.1　曲線 $y = b\,\mathrm{sn}\left(\frac{x}{c}\right)$　$\left(b = \frac{2k}{1-k^2}c\right)$ の長さ

弧長を s とすると $(ds)^2 = (dx)^2 + (dx)^2$ である．なわとびのひもは

$$y = b\,\mathrm{sn}\left(\frac{x}{c}\right) \quad (b,\, c = \text{定数}) \tag{2}$$

といったヤコビの楕円関数で表わされる．x について微分すると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{c}\,\mathrm{cn}\left(\frac{x}{c}\right)\mathrm{dn}\left(\frac{x}{c}\right).$$

$\left(\dfrac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ より

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \mathrm{cn}^2\left(\frac{x}{c}\right)\mathrm{dn}^2\left(\frac{x}{c}\right).$$

ここで $\mathrm{cn}^2\, u = 1 + \frac{1}{k^2}(\mathrm{dn}^2\, u - 1)$ を用いて整理すると

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 - \left(\frac{b}{c}\right)^2 \frac{1-k^2}{k^2}\mathrm{dn}^2\left(\frac{x}{c}\right) + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \frac{1}{k^2}\mathrm{dn}^4\left(\frac{x}{c}\right).$$

ここで

$$b = \frac{2k}{1-k^2}c \tag{3}$$

とおくと

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 - \frac{4}{1-k^2}\mathrm{dn}^2\left(\frac{x}{c}\right) + \left(\frac{2}{1-k^2}\right)\mathrm{dn}^4\left(\frac{x}{c}\right)$$

$\dfrac{2}{1-k^2}\mathrm{dn}^2\left(\dfrac{x}{c}\right) > 1$ より

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \left\{\frac{2}{1-k^2}\mathrm{dn}^2\left(\frac{x}{c}\right) - 1\right\}^2$$

となる. 弧長 s を x の増す向きに原点 O から測ると，

$$s = \frac{2}{k'^2}\int_0^x \mathrm{dn}^2\left(\frac{x}{c}\right)dx - x$$

(ただし $k' = \sqrt{1-k^2}$.) である．上の積分のおいて $\sin\phi = \mathrm{sn}\, u(-\frac{\pi}{2} \le \phi \le \frac{\pi}{2},\ -K(k) \le u \le K(k))$ とおくと $\cos\phi d\phi = \mathrm{cn}\, u\,\mathrm{dn}\, u du$．また，$\cos\phi = \mathrm{cn}\, u$ より，$d\phi = \mathrm{dn}\, u du$ なので

$$\varepsilon(u) \equiv \int_0^u \mathrm{dn}^2\, u\ du = E(k,\phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\ d\phi.$$

これは第 2 種楕円積分である，この記号を用いると弧長は

$$s = \frac{2c}{k'^2}\varepsilon\left(\frac{x}{c}\right) - x \tag{4}$$

となる.

この曲線が $x = 0$ の次に x 軸を切る点を $x = 2a$ とすると，これは $\mathrm{sn}\, u = 0$ になる u の値 $u = 2K(k)$ にあたる. ここで $K = K(k)$ は第 1 種完全楕円積分である. よって $\dfrac{2a}{c} = 2K$ より

$$\frac{1}{c} = \frac{K(k)}{a}. \tag{5}$$

$x = 0$ $(u = 0)$ から $x = 2a$ $(u = 2K)$ の間に $\sin\phi = \mathrm{sn}\, u$ の ϕ は 0 から π まで変化する.

$$\begin{aligned} E = E(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\ d\phi = \int_0^k \mathrm{dn}^2\, u\ du \\ &= \varepsilon(K) \end{aligned} \tag{6}$$

は第 2 種完全楕円積分である.$x = 0$ から $x = 2a$ までの曲線の全弧長を l とする．$x = 2a$ を (4) に代入すると，

$$l = \frac{2c}{k'^2}\varepsilon\left(\frac{2a}{c}\right) - 2a = s = \frac{2c}{k'^2}\varepsilon(2K) - 2a.$$

$x = K$ を軸に対称であることから $\varepsilon(2K) = 2\varepsilon(K)$, また (5) より $c = \dfrac{a}{K}$, (6) より $E = \varepsilon(K)$ なので,

$$l = \frac{2c}{k'^2}2E - 2a = \frac{4cE}{k'^2} - 2a = \frac{4aE}{Kk'^2} - 2a$$

である.

4.2　なわとびのロープ

4.2.1　エネルギー

ロープの両端が固定され，この両端を結ぶ直線を軸としてロープが一定の角速度で回転し，重力の影響は無視する．この間のロープの形は放物線でもなく懸垂線でもなく sn 関数のグラフである.

この場合，ロープが sn 関数のグラフの形になっているのは向心力が働いているからである．回転の角速度を ω をすると軸（x 軸にとる）から y だけ離れたところのロープの単位質量に働く向心力は,

$$f=\omega^2 y \tag{7}$$

である．この力はいわゆる見掛けの力であるが，ポテンシャル $u=-\dfrac{1}{2}\omega^2 y^2$ を考えることができ，遠心力はこのポテンシャルから $f=-\dfrac{du}{dy}$ によって導かれるものと考えることができる．ロープの単位長さの質量（線密度）を ρ とし，ロープの長さを s，全長を z で表わすと，向心力の全位置エネルギーは

$$U=-\rho\omega^2\int_0^l y^2\ ds \tag{8}$$

である．曲線の形 $y=y(s)$ は全ポテンシャルエネルギー U を最小にするようなものであるはずである（4.4 変分原理を参照）．これは，求めるロープの曲線の形はロープのおもさ (線密度 ρ)，回転の角速度 ω に無関係で，ロープの全長と両端の固定点の間の距離だけで決まるはずである．この事象は懸垂線（一定の重力の下にたれているロープの形）がロープの重さ（重力の重さにも）によらず，ロープの全長とこれを固定する 2 点の位置とだけによって決まることと似ている．

4.2.2　力の釣り合い

回転するロープの両方の固定端を結ぶ直線を地面と水平にとり，これを x 軸とする．固定点の一方を原点 $x=0$ にとり，他方を $x=2a$ にとる．各場所に働く向心力のためロープの張力 T は一定でない．張力 T の x 方向の成分はどこでも釣り合っていて，一定でなければならない．この成分は

$$T\cos\psi=T\frac{dx}{ds}$$

である．x 方向の力の釣り合いは

$$\frac{d}{ds}\left(T\cos\psi\right)=\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right)=0$$

によって与えられる．したがって

$$T\cos\psi=T\frac{dx}{ds}=\text{一定}=T_0 \tag{9}$$

である．

y 方向の力について考えていく．微小部分の長さを ds とすると，その部分の重さは ρds となる．この部分のみを切り出して考えてみると，微小部分は半径を y，角速度を ω とする円運動を行う．この時，この円運動を行わせている力は円の中心に向かって働く向心力である．この向心力の大きさを f とすると，この大きさは

$$f=\rho\omega^2 y\ ds \tag{10}$$

となる．ここで y 成分の力 F_y について考える．F_y を長さ s で変化する関数とし，これを $f=F_y(s)$ とする．これを s で微分すると,

$$\frac{d}{ds}f=\frac{d}{ds}F_y(s) \tag{11}$$

となる．$s=ds$ をすると，右辺は ds における接線の傾きとなる．ここで

$$\text{（接線の傾き）}=\frac{\text{（力の増加分：}df\text{）}}{\text{（長さの増加分：}ds\text{）}}$$

であるので,（11）の両辺に ds をかけると

$$dy=\frac{d}{ds}(F_y(s))\ ds \tag{12}$$

となる．よってこれは長さの増加分:ds に対する y 成分の力の増加分を表す．また，張力 T の y 成分の力は $F_y=T\sin\psi=T\left(\dfrac{dy}{ds}\right)$ となるので,（12）に代入すると,

$$dy=\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)\ ds=\frac{d}{ds}\left(T\sin\psi\right)ds$$

となる．これが向心力と釣り合うので,（10）より

$$\rho\omega^2 y\ ds=-\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right)\ ds=-\frac{d}{ds}\left(T\sin\psi\right)\ ds \tag{13}$$

となる．これが y 方向成分の力の釣り合いである. (9) より

$$T=\frac{ds}{dx}T_0.$$

これを (13) に代入して

$$\rho\omega^2 y+\frac{d}{ds}\left(T_0\frac{ds}{dx}\frac{dy}{ds}\right)=0$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{\rho\omega^2}{T_0}y=0 \tag{14}$$

あるいは

$$p=\frac{dy}{dx} \tag{15}$$

とおいて $\left(\dfrac{dy}{ds}=\dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{ds}=p\dfrac{dx}{ds}\right)$ により

$$\frac{d}{ds}p=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{ds}=p\frac{dp}{dy}\frac{dx}{ds},$$

および $(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2$ に書き直した式 $\left(\dfrac{ds}{dx}\right)^2=1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ に (15) を代入して

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=1+p^2 \tag{16}$$

となる．これを考慮すれば,（14）,（16）から非線形の方程式

$$p\frac{dp}{dy}=-\frac{\rho\omega^2}{T_0}y\sqrt{1+p^2} \tag{17}$$

を得る．(17) を積分する．

$$\begin{aligned} p\ dp &= -\frac{\rho\omega^2}{T_0}y\sqrt{1+p^2}\ dy \\ \int_0^p\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\ dp &= -\frac{\rho\omega^2}{T_0}\int_b^y y\ dy \end{aligned}$$

ここで $1+p^2=t$ と置くと，$2p\ dp=dt$ となる．また $y:b\to y$ のとき，$p:0\to p$ となり，$t:0\to 1+p^2$ となるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^{1+p^2}\frac{dt}{\sqrt{t}} &= -\frac{\rho\omega^2}{T_0}\int_b^y y\ dy \\ \sqrt{1+p^2} &= 1+\frac{\rho\omega^2}{2T_0}\left(b^2-y^2\right) \end{aligned} \tag{18}$$

となる．ただし積分定数 b は $p=\dfrac{dy}{dx}=0$ になる y の値，すなわち y の最大値である．上式（18）を 2 乗して $p^2=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ について解けば

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{\rho\omega^2}{T_0}\left(b^2-y^2\right)\left\{1+\frac{\rho\omega^2}{4T_0}\left(b^2-y^2\right)\right\} \tag{19}$$

を得る．ゆえに

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{\rho\omega^2}{T_0}b^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\left\{1+\frac{\rho\omega^2}{4T_0}b^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{\rho\omega^2 b^2}{T_0}\left(1+\frac{\rho\omega^2 b^2}{4T_0}\right)\left\{\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\left(1-\frac{\rho\omega^2\frac{b^2}{4T_0}}{1+\rho\omega^2\frac{b^2}{4T_0}}\frac{y^2}{b^2}\right)\right\}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \sqrt{\frac{\rho\omega^2 b^2}{T_0}\left(1+\frac{\rho\omega^2 b^2}{4T_0}\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\left(1-\frac{\rho\omega^2\frac{b^2}{4T_0}}{1+\rho\omega^2\frac{b^2}{4T_0}}\frac{y^2}{b^2}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T_0}\left(1+\frac{\rho\omega^2 b^2}{4T_0}\right)}\sqrt{\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\left(1-k^2\frac{y^2}{b^2}\right)}\end{aligned}$$

ただし

$$\frac{\rho\omega^2\frac{b^2}{4T_0}}{1+\rho\omega^2\frac{b^2}{4T_0}} = k^2$$

と置き，K は $0<k<1$ である．$\dfrac{y}{b}=\eta$ とおくと $\dfrac{d\eta}{dy}=\dfrac{1}{b}$，また

$$\frac{1}{c} = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{T_0}\left(1+\frac{\rho\omega^2 b^2}{4T_0}\right)} = \frac{2k}{k'^2 b} \tag{20}$$

ただし $k'=\sqrt{1-k^2}$ とする．よって

$$b\frac{d\eta}{dx} = b\frac{1}{c}\sqrt{(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2)}$$

$$\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2)}} = \frac{dx}{c} \tag{21}$$

を得る． (21) を積分すれば

$$\begin{aligned}\int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2)}} &= \int_0^x \frac{dx}{c} \\ \mathrm{sn}^{-1}(\eta) = \int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2)}} &= \frac{x}{c}\end{aligned}$$

$$\eta = \mathrm{sn}\left(\frac{x}{c}\right)$$

あるいは

$$y = b\,\mathrm{sn}\left(\frac{x}{c}\right) \tag{22}$$

となる．(20) により

$$b = \frac{2k}{k'^2}c \tag{23}$$

であるから，このロープの形は前節の曲線 ((2)，(3) 参照）と全く同じ形である． ロープの両端が x 軸上にあり，$x=0$ と $x=2a$ とであるとすると，その形は前節と同一で，(5) より

$$\frac{1}{c} = \frac{K(k)}{a} \tag{24}$$

あるいは

$$y = b\,\mathrm{sn}\left(\frac{Kx}{a}\right)$$

である．ロープの全長 l は (6) により

$$l = \frac{4a}{k'^2}\frac{E}{K} - 2a.$$

長さ l のロープの両端を $x=0,\,2a$ で固定したとすると，前節 (19) によって母数 k が定まる．ロープの振れ幅 b は (23) と (24) とによって定まる．(20) によって $\dfrac{\rho\omega}{4T_0}$ がきまるから，回転数 $\dfrac{\omega}{2\pi}$ は任意であり，これを与えると，ロープの張力に関係した T_0 が定まることになる．

4.3 日常生活のなわとび

なわとびのひもの回転軸を地面と水平にとり，これを x 軸とする．このときなわとびのひもを，回転軸である x 軸上にない 2 点で固定し，一定の角速度 ω で回転運動をさせる場合を考える．この運動において，なわとびの張力 T は向心力と釣り合っているとみなすことができ，$\rho=$ 線密度，$s=$ なわとびの長さとすると，なわとびの微小質量 ρds に働く向心力の y，z 成分はそれぞれ $\rho ds\omega^2 y$，$\rho ds\omega^2 z$ である．したがって x，y，z 成分の釣り合いは

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0, \tag{25}$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + \rho\omega^2 y = 0, \tag{26}$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + \rho\omega^2 z = 0 \tag{27}$$

である．3 つの第 1 積分を求める．(25) を積分すると

$$T\frac{dx}{ds} = T_0. \tag{28}$$

$(27)\times y-(26)\times z$ を積分すると

$$\left(y\frac{dz}{ds}-z\frac{dy}{ds}\right) = H. \tag{29}$$

$(26)\times\left(\dfrac{dy}{ds}\right)ds+(27)\times\left(\dfrac{dz}{ds}\right)ds$ を積分すると

$$\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\rho\omega^2(y^2+z^2) = \lambda. \tag{30}$$

(28)，(29)，(30) において，T_0, H, λ は定数である．$y^2+z^2=r^2$ とおくと

$$y\frac{dy}{ds}+z\frac{dz}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d(r^2)}{dx} \tag{31}$$

が成り立つ．また，(28) より

$$T = \frac{dx}{ds}T_0 \tag{32}$$

なので，(29)(32) より

$$y\frac{dz}{dx}-z\frac{dy}{dx} = \frac{H}{T_0}. \tag{33}$$

(31)，(33) を 2 乗して足すと，$r^2=y^2+z^2$ より

$$r^2\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\} = \frac{1}{4}\left\{\frac{d(r^2)}{dx}\right\}^2 + \frac{H^2}{T_0^2}. \tag{34}$$

$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$ より，(34) は

$$\left\{\frac{d(r^2)}{dx}\right\}^2 = 4r^2\left\{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2-1\right\} - \frac{4H^2}{T_0^2}.$$

(28) より，$\dfrac{ds}{dx}=\dfrac{T}{T_0}$ なので

$$\left\{\frac{d(r^2)}{dx}\right\} = r^2\left(\frac{4T^2}{T_0^2}-4\right) - \frac{4H^2}{T_0^2}.$$

(30) より

$$T = 2\lambda - \rho\omega^2 r^2$$

なので

$$\begin{aligned}\left\{\frac{d(r^2)}{dx}\right\}^2 &= \frac{4r^2}{T_0^2}(2\lambda-\rho\omega^2 r^2)^2 - 4r^2 - \frac{4H^2}{T_0^2} \\ &= \frac{1}{T_0^2}\left\{4r^2(2\lambda-\rho\omega^2 r^2)^2 - 4T_0^2 r^2 - 4H^2\right\} \\ &= \frac{4\rho^2\omega^4}{T_0^2}\left\{r^6 - \frac{4}{\rho\omega^2}\lambda r^4 - \frac{r^2}{\rho^2\omega^4}(T_0^2-4\lambda^2) - \frac{H^2}{\rho^2\omega^4}\right\} \\ &= \frac{4\rho^2\omega^4}{T_0^2}(r^2-b^2)(r^2-c^2)(r^2-d^2). \end{aligned} \tag{35}$$

b, c, d は定数である．ただし，r^2 の極限は b^2, c^2, d^2 のどれかであり，$r^2 \neq 0$ である．ここで $b^2 > c^2$ とし，r^2 が b^2 と c^2 を極値としてもつという条件をつけると，$(r^2-b^2)(r^2-c^2) < 0$ となる．また (35) は左辺が 2 乗なので，左辺も正でなければならない．さらに，$d^2 > b^2$ とすると，$d^2 > b^2 > r^2 > c^2$ である．

$$r^2 = c^2 + (b^2-c^2)\sin^2\phi = b^2\sin^2\phi + c^2\cos^2\phi. \tag{36}$$

これを微分すると

$$\frac{d(r^2)}{dx} = 2(b^2-c^2)\sin\phi\cos\phi\frac{d\phi}{dx}. \tag{37}$$

(37) と (36) を比べる．$k^2 = \dfrac{b^2-c^2}{d^2-c^2}$ とおくと

$$\begin{aligned}
b^2-r^2 &= b^2-b^2\sin^2\phi-c^2\cos^2\phi=(b^2-c^2)\cos^2\phi\\
r^2-c^2 &= b^2\sin^2\phi+c^2\cos^2\phi-c^2=(b^2-c^2)\sin^2\phi\\
d^2-r^2 &= d^2-b^2\sin^2\phi-c^2\cos^2\phi\\
&= (d^2-c^2)(1-k^2\sin^2\phi).
\end{aligned}$$

(35)(37) より

$$4(b^2-c^2)^2\cos^2\phi\sin^2\phi\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2$$
$$=\frac{4\rho^2\omega^4}{T_0^2}(b^2-c^2)\cos^2\phi(b^2-c^2)\sin^2\phi(d^2-c^2)(1-k^2\sin^2\phi)$$

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 = \frac{\rho^2\omega^4}{T_0^2}(d^2-c^2)(1-k^2\sin^2\phi)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{dx} &= \frac{\rho\omega^2}{T_0}\sqrt{d^2-c^2}\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\\
d\phi &= \frac{\rho\omega^2}{T_0}\sqrt{d^2-c^2}\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}dx\\
\int_0^\phi\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} &= \frac{\rho\omega^2}{T_0}\sqrt{d^2-c^2}x.
\end{aligned}$$

したがって，a を $\dfrac{\rho\omega^2}{T_0}\sqrt{d^2-c^2} = \dfrac{K}{a}$ によって決められるとすれば

$$\frac{Kx}{a} = \int_0^\phi\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = \mathrm{sn}^{-1}(\sin\phi).$$

$\phi = \mathrm{am}\left(\dfrac{Kx}{a}\right)$ であり，(36) より

$$r^2 = b^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{Kx}{a}\right) + c^2\,\mathrm{cn}\left(\frac{Kx}{a}\right).$$

ロープはこれによって与えられる回転曲面の上にのっているのである．

4.4 変分原理

変分法とは，汎関数（関数を変数とする関数）についての極値問題で，汎関数に極値を与えるような関数の形と，そのときの汎関数の値を決める問題である．$y, \dfrac{dy}{dx}$ の関数 $F\left(y, \dfrac{dy}{dx}\right)$ を x について積分したものを，$I = I(y)$ とすると，一般に汎関数は

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F\left(y,\ \frac{dy}{dx}\right)dx \tag{38}$$

で表わされ，この汎関数 I に極値を与える関数を $y = y(x)$ とする．また，このとき F は x, y, $\dfrac{dy}{dx}$ について連続微分可能と仮定する．境界条件として

$$y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2 \tag{39}$$

とする．積分範囲を固定したまま y の関数形を少し変えたとき，I が極値になる，つまりこの微小な変化が 0 になるような関数 $y(x)$ を求めるのが変分法の問題である. このとき，x の変域の両端 $x = x_1$, $x = x_2$ での y の値は変えないものとし，その間の x に対する y の値を変える.

I に極値を与える関数 $y = y(x)$ と比較する関数（比較関数）を与え，これと $y(x)$ との差を δy とする. この δy を y の変分と呼ぶ.δy は任意の x の関数である. また，このとき $\dfrac{dy}{dx}$ の変分を $\delta\dfrac{dy}{dx}$ と記す．比較関数を

$$Y = y(x) + \delta y(x) \tag{40}$$

と表わすことにし，このとき

$$\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0 \tag{41}$$

とすると比較関数 Y は $Y(x_1) = y(x_1) = y_1$, $Y(x_2) = y(x_2) = y_2$ となり，$y = y(x)$ と同じ境界条件 (39) を満たしている.

(40) を (38) に代入すると

$$I(Y) = \int_{x_1}^{x_2} F\left\{y+\delta y,\ \frac{dy}{dx}+\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}dx. \tag{42}$$

また，I に極値を与える $y = y(x)$ は

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F\left(y,\ \frac{dy}{dx}\right)dx \tag{43}$$

となるので I の変分を δI で表わすとすると (42) − (43) より

$$\begin{aligned}
\delta I &= Y(x) - y(x)\\
&= \int_{x_1}^{x_2} F\left\{y+\delta y,\ \frac{dy}{dx}+\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}dx - \int_{x_1}^{x_2} F\left(y,\ \frac{dy}{dx}\right)dx\\
&= \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dy}{dx}\right)}\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}dx.
\end{aligned}$$

ここで $\delta(dy) = d(\delta y)$ より $\delta\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dx}(\delta y)$ となるから，変分をとる操作と，微分する操作の順序を入れ替えることができる. よって

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dy}{dx}\right)}\frac{d}{dx}(\delta y)\right\}dx.$$

第 2 項に部分積分を使えば，

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y}\delta y\,dx + \left[\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dy}{dx}\right)}\delta y\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dy}{dx}\right)}\right\}\delta y\,dx.$$

(41) より

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dy}{dx}\right)}\right\}\right]\delta y\cdot dx = 0.$$

$\delta y(x)$ は任意であるから，F は

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dy}{dx}\right)} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{44}$$

を満たすことになる. これはよく知られたオイラーの方程式である.

(7) において，なわとびのロープは遠心力の位置エネルギーが最小になる形をとるといった. これは x 軸のまわりの慣性モーメント $\int\rho y^2\,ds$ を最大にする形であるといってもよい. いずれにしてもロープの形は，長さ

$$\int ds = \int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = 一定 \tag{45}$$

の条件のもとに

$$\int y^2 ds = \int y^2\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = 最大 \tag{46}$$

という変分原理に帰せられる.(45) に未定係数 α を掛けて (46) から引き,

$$I = \int_0^{2a} (y^2 - \alpha)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{47}$$

に対する変分原理

$$\delta I = 0$$

を実際に計算する.

オイラーの方程式 (44) を (47) にあてはめると，求める曲線は,

$$\frac{d}{dx}\left\{(y^2 - \alpha)\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\right\} - 2y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0$$

を満たす. この式は書きかえて整理すると

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{y^2 - \alpha}$$

である. この式に $\dfrac{dy}{dx}$ を掛けて書き直すと

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx = \frac{2y}{y^2 - \alpha} \cdot dy$$

となり，積分して

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{dy}{dx}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx &= \int \frac{2y}{y^2 - \alpha} \cdot dy \\ \frac{1}{2}\log\left|1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right| &= \log\left|\alpha - y^2\right| + A \qquad (48) \end{aligned}$$

(A は定数)

を得る. したがって β を定数として

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \beta(\alpha - y^2)^2 \tag{49}$$

である.$\dfrac{dy}{dx} = 0$ となる y の値を b とすると

$$\beta = \frac{1}{(\alpha - b^2)^2}$$

であるから，(49) は書き直して整理すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= \frac{(\alpha - y^2)^2 - (\alpha - b^2)^2}{(\alpha - b^2)^2} \\ &= \frac{2}{\alpha - b^2}(b^2 - y^2)\left\{1 + \frac{b^2 - y^2}{2(\alpha - b^2)}\right\} \qquad (50) \end{aligned}$$

となる. これは

$$\frac{2}{\alpha - b^2} = \frac{\rho\omega^2}{T_0}$$

とおくことによって

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{\rho\omega^2}{T_0}(b^2 - y^2)\left\{1 + \frac{\rho\omega^2}{4T_0}(b^2 - y^2)\right\}$$

となり，(19) と一致する. したがって (50) の解は前に得た式 (22), (23) で与えられる.

なお重力を受けてたれ下がったひもの形（懸垂線）は，重力の位置エネルギーを最小にする形であるから，y を鉛直方向にとれば，変分原理は

$$\int (y + \alpha)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \text{最大}$$

である.(48) の代わりに

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \beta(y + \alpha)^2$$

を用いる.

$1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \beta(y + \alpha)^2$ を解いて,

$$y = a\cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) - \alpha.$$

これが懸垂線である. ここに $a = \dfrac{1}{\beta}$,α と x_0 とはひもの長さと，両端の位置で決まる.

5　おわりに

この研究を通して，楕円関数という新しい概念に触れ，楕円関数の性質や定理を学ぶことができた．なわとびのひもの回転運動の考察にあたっては，ヤコビの楕円関数の性質や定理の理解に加えて，向心力や力の釣り合いなど，力学の考えが必要となった．

今回の研究では身近な力学現象であるなわとびの回転運動について考察したので，実数範囲という制限がついたが，そのような制限をもたない複素変数における楕円関数について，理解を深めることが今後の課題である．

参考文献

[1] 戸田 盛和，日本評論社，楕円関数入門，2004
[2] 安藤 四郎，日新出版，楕円積分・楕円関数入門，1970
[3] 古屋 茂，サイエンス社，微分方程式入門，1975
[4] 三宅 敏恒，培風館，入門微分積分，2004
[5] 難波 誠，裳華房，微分積分学，2003
[6] 岡崎 誠，共立出版，べんりな変分原理，1993
[7] 林 毅，村 外志夫，コロナ社，変分法，1987
[8] 岩波書店，数学史　，1986
[9] 藤本坦孝，岩波書店，複素解析，1996
[10] 長岡洋介，東京教学社，物理の基礎，2004
[11] 斉藤晴男他，新興出版社啓林館，高等学校物理 IB，1997
[12] 斉藤晴男他，新興出版社啓林館，高等学校物理　，1998